$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad on\ pose: y=f^{-1}(x)$$

$$f(y)=x$$

$$=\frac{-2\sqrt{1+Cos\ y}}{\sin\ y}$$

$$f(y)=\sqrt{1+Cos\ y}=x$$

$$\Rightarrow 1+Cos\ y=x^2$$

$$\Rightarrow Cos\ y=x^2-1$$

$$\Rightarrow Cos^2 y=(x^2-1)^2$$

$$\Rightarrow -Cos^2 y=-1-x^4+2x^2$$

$$\Rightarrow 1-Cos^2 y=2x^2-x^4$$

$$\Rightarrow \sin^2 y=2x^2-x^4$$

$$\Rightarrow \sin\ y=\sqrt{2x^2-x^4}$$

d'où

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{2x^2-x^4}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\sqrt{2-x^2}}$$

$$\forall x\in\left]0,\sqrt{2}\right[$$

2. $g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$

$$x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$

$$\begin{cases}G'(x)=g(x)\\G(0)=0\end{cases}$$

a) $\varphi(x)=G(x)+G(-x)$

$$\varphi'(x)=G'(x)-G'(-x)$$

$$=g(x)-g(-x)$$

$$=0$$

φ est constante sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$

$$\varphi(0)=0$$

$$\varphi(x)=0,\ \forall x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$$

$$\Rightarrow G(x)+G(-x)=0$$

$$\Rightarrow G(-x)=-G(x)$$

G est impaire.

b) on a :

$$g(x)=-\left(f^{-1}\right)'(x)$$

$$\Rightarrow G(x)=-f^{-1}(x)+k \quad ; \quad k\in\mathbb{R}$$

$$G(0)=-f^{-1}(0)+k$$

$$\Rightarrow 0=-\pi+k$$

$$\Rightarrow k=\pi$$

d'où

$$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$$

$$G(1)=\pi-f^{-1}(1)$$

$$G(1)=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

EX 22 :

$$\begin{cases}f(0)=1\\f(1)=0\\f'(x)=\dfrac{-2}{\pi.\sqrt{1-x^2}}\end{cases}$$

1. $f'(x)<0\ ;\ \forall x\in\left]0,1\right[$

f est continue sur $[0,1]$ *et strictement décroissante*

$\Rightarrow$ *f réalise une bijective de* $[0,1]$ *sur*

$$f([0,1])=[f(1),f(0)]=[0,1]$$

2.a) soit $g(x)=f(Cos\ x)$

$$g'(x)=-\sin x\,.f'(Cos\ x)$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi\sqrt{1-Cos^2 x}}$$

$$=\frac{+2\sin x}{\pi.|\sin x|}$$

$$=\frac{2}{\pi} \quad car \quad \sin x>0$$

g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn